УДК. 621.3.019

С. С. Соколов
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)
ул. Профессора Попова, д. 5, Санкт-Петербург, 197376, Россия

Оптимальная длительность интервала наблюдения нестационарного потока отказов радиоэлектронных средств

Аннотация. *Предложен метод определения оптимальной длительности интервала наблюдения нестационарного пуассоновского потока отказов радиоэлектронных средств (РЭС) для широкого класса стационарных процессов, модулирующих поток отказов по интенсивности. Знание оптимальной длительности интервала наблюдения, учитывающей двойную стохастичность потока, необходимо для расчета и прогнозирования показателя безотказности РЭС, функционирующих в околоземном космическом пространстве в составе искусственных спутников Земли, в ходе которого РЭС подвергаются воздействиям нестационарных потоков проникающей радиации и электростатических зарядов, приводящим к кратковременным или необратимым отказам. На основании известной линейной модели дважды стохастического точечного процесса впервые проведен подробный математический анализ и получены аналитические выражения для оптимальной длительности интервала наблюдения по критерию минимума суммарной среднеквадратической погрешности. Так как истинный характер нестационарности неизвестен, то анализ был проведен для гауссовского и гаусс-марковского модулирующих процессов, охватывающих широкий класс случайных процессов. Результаты анализа подтвердили достаточную для практики близость значений оптимальной длительности интервала наблюдения потока отказов для широкого класса модулирующих процессов.*

Ключевые слова: безотказность технических средств, нестационарный поток отказов, интервал наблюдения реализации потока, оптимизация длительности интервала

Для цитирования: Соколов С. С. Оптимальная длительность интервала наблюдения нестационарного потока отказов радиоэлектронных средств // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2018. № 3. С. 48–56.

S. S. Sokolov
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"
5, Professor Popov Str., 197376, St. Petersburg, Russia

Optimal Monitoring Time Interval for Radio-Electronic Equipment Unsteady Failure Rate

Abstract. *The method for determining the optimal duration of monitoring interval of non-stationary Poisson failure rate of radio-electronic equipment (REE) for a wide range of stationary processes, modulating it by intensity. To know the optimal du-ration of monitoring interval, taking into account the flow double stochasticity is necessary to calculate and predict REE reliability factor, operating in near-Earth space as a part of artificial Earth satellites (AES). In the course of calculation REE is exposed to ionizing radiation of unsteady flows and electrostatic charges, leading to short duration or irreversible failures. Based on the known linear model of double stochastic point process a detailed mathematical analysis is made for the first time ever and analytical expressions were obtained for the optimal monitoring time interval with respect to minimum combined standard uncertainty. Since the true nature of unsteadiness is unknown, analysis is carried out for Gaussian and Gauss-Markov modulating processes, covering a wide range of random processes. The analysis results confirm practical similarity of optimal monitoring time interval values for a wide range of modulating processes.*

Key words: reliability of technical equipment, unsteady flow of failures, monitoring implementation of interval flow, optimization interval duration

For citation: Sokolov S. S. Optimal Monitoring Time Interval for Radio-Electronic Equipment Unsteady Failure Rate. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2018, no. 3, pp. 48–56. (In Russian)

Введение. Изучение проблемы надежности функционирования радиоэлектронных средств (РЭС) в условиях околоземного космического пространства (ОКП) стало возможным благодаря организации постоянного наблюдения за параметрами радиационной обстановкой в ОКП с помощью отечественной многоканальной регистрирующей аппаратуры, устанавливаемой на метеорологических искусственных спутниках Земли (ИСЗ) "Метеор" и "Электро" [1], [2]. Реализуя эффективные алгоритмы формирования текущих оценок интенсивности потоков проникающей радиации [3], [4], были получены данные о параметрах радиационных полей, характеризуемых существенной временной и пространственной нестационарностью и негативно влияющих на параметры электрорадиокомпонентов (ЭРК) РЭС, особенно на их полупроводниковые компоненты. При этом интенсивность потока отказов аппаратуры ИСЗ также носит нестационарный характер.

Дальнейшие исследования позволили реализовать ряд конструкторско-технологических решений полупроводниковых ЭРК и конструкций РЭС в целом, обеспечивших их радиационную стойкость [5]–[9]. Однако для нестационарного потока отказов расчет и прогнозирование показателей надежности РЭС возможны лишь на основе знания текущего значения интенсивности потока отказов, полученного за некоторый оптимальный интервал его наблюдения.

Интенсивность отказов технических средств на разных стадиях их "цикла жизни" не остается постоянной. В приложениях используют распределение Вейбулла вида $P(t)=\exp\left(-\nu_0 t^{\delta}\right)$, где t – время безотказной работы; ν_0 и δ – параметры распределения. Интенсивность отказов $\nu(t)=\nu_0\delta t^{\delta-1}$ этого распределения позволяет учесть динамику отказов на стадии производства и настройки изделия ($\delta<1$, интенсивность отказов снижается); на стадии нормальной эксплуатации ($\delta=1$, $\nu(t)=\nu_0=\text{const}$) и на стадии исчерпания ресурса ($\delta>1$, интенсивность отказов возрастает). И если качественное изменение поведения функции $\nu(t)$ на первой и третьей стадиях объяснимо, то постоянство интенсивности отказов на второй стадии наблюдается не всегда.

Следовательно, чтобы воспользоваться для расчета вероятности безотказной работы изделия экспоненциальным распределением вида

$$P(t)=\exp\left(-\nu_0 t\right),$$

значение параметра распределения ν_0 должно быть получено при оптимальном значении длительности интервала наблюдения Δ_{opt} нестационарного потока отказов по критерию минимума дисперсии суммарной среднеквадратической погрешности вида

$$\overline{\varepsilon}_{\Sigma}^{2}=\overline{\varepsilon}_{\text{д}}^{2}+\overline{\varepsilon}_{\text{ст}}^{2},$$

где $\overline{\varepsilon}_{\text{д}}^{2}$ и $\overline{\varepsilon}_{\text{ст}}^{2}$ – дисперсии независимых и некоррелированных динамической и статистической погрешностей соответственно.

Этот случай и является предметом рассмотрения, охватывая ситуации, когда поток отказов – пуассоновский, а функция $\lambda(t)$, модулирующая поток по интенсивности, принадлежит совокупности, ограниченной случайными процессами с гауссовской

$$R_{\lambda}(\tau)=\sigma_{\lambda}^{2}\exp\left(-\beta^{2}\tau^{2}\right)$$

и экспоненциальной

$$R_{\lambda}(\tau)=\sigma_{\lambda}^{2}\exp\left(-\beta|\tau|\right)$$

функциями автокорреляции, являющимися предельными с точки зрения существования производных у описываемых этими функциями процессов. Здесь σ_{λ}^{2} – дисперсия модулирующего процесса; β – частотный параметр модулирующего процесса ($\beta=1/\tau_{\text{к}}$, $\tau_{\text{к}}$ – интервал корреляции); τ – аргумент, имеющий размерность времени.

В качестве модели наблюдаемого процесса $y(t)$ примем аддитивную линейную модель [10] вида

$$y(t)=\lambda(t)+n_{\text{э}},$$

где $\lambda(t)$ – упомянутая выше модулирующая функция; $n_{\text{э}}$ – эквивалентный стационарный импульсный шум.

Гауссовская функция автокорреляции модулирующего процесса. Аддитивный характер модели наблюдаемого процесса и независимость входящих в него компонент позволяют рассматривать их преобразование оператором "текущего среднего" с импульсной характеристикой $h(\tau)$ также независимо.

Общее выражение для значения дисперсии динамической погрешности преобразования модулирующей функции $\lambda(t)$ оператором $h(\tau)$ с текущим значением длительности интервала наблюдения 2Δ имеет вид [11]

$$\overline{\varepsilon}_{\text{д}}^{2}=\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{2\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta}\left[\lambda(t)-\lambda^{*}(t)\right]^{2}dt, \qquad (1)$$

где $\lambda^{*}(t)$ – текущая оценка модулирующего процесса $\lambda(t)$, определенная как

$$\lambda^{*}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(t-\tau)h(\tau)\,d\tau. \qquad (2)$$

Импульсная характеристика $h(\tau)$ оператора "текущего среднего" имеет вид

$$h(\tau)=1/\Delta,\ 0\le\tau\le\Delta;$$

$$h(\tau)=0,\ \tau<0,\tau>\Delta.$$

Подставив (2) в (1), получим:

$$\overline{\varepsilon}_{д}^{2}=\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{2\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\left[\lambda(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]^2dt.$$

Возведя подынтегральную функцию в квадрат и раскрыв квадратные скобки, получим:

$$\overline{\varepsilon}_{д}^{2}=\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{2\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\lambda^2(t)dt-$$

$$-2\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau\left[\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{2\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\lambda(t-\tau)\lambda(t)dt\right]+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\varphi)d\varphi\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\theta)d\theta\left[\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{2\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\lambda(t-\varphi)\lambda(t-\theta)dt\right],$$

где φ и θ – вспомогательные аргументы.

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{2\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\lambda^2(t)dt=R_{\lambda}(0),$$

$$\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{2\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\lambda(t-\tau)\lambda(t)dt=$$

$$=\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{2\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\lambda(t-\lambda)\lambda(t-\theta)dt=R_{\lambda}(\tau),$$

запишем:

$$\overline{\varepsilon}_{д}^{2}=R_{\lambda}(0)-2\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\tau)R_{\lambda}(\tau)d\tau+$$

$$+2\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\theta)R_{\lambda}(\tau-\theta)d\theta.$$

Учитывая условие физической осуществимости и ограниченность "памяти" оператора "текущего среднего", получим окончательно:

$$\overline{\varepsilon}_{д}^{2}=R_{\lambda}(0)-2\int\limits_{0}^{\Delta}h(\tau)R_{\lambda}(\tau)d\tau+$$

$$+2\int\limits_{0}^{\Delta}h(\tau)d\tau\int\limits_{0}^{\Delta}h(\theta)R_{\lambda}(\tau-\theta)d\theta. \qquad (3)$$

Подставив в (3) $h(\tau)=1/\Delta$,

$R_{\lambda}(\tau)=\sigma^2\exp\left(-\beta^2\tau^2\right)$, получим:

$$\overline{\varepsilon}_{д}^{2}=\sigma_{\lambda}^{2}\left\{1-2\int\limits_{0}^{\Delta}\frac{1}{\Delta}\exp\left(-\beta^2\tau^2\right)d\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{\Delta}\frac{1}{\Delta}d\tau\int\limits_{0}^{\Delta}\frac{1}{\Delta}\exp\left[-\beta^2(\tau-\theta)^2\right]d\theta\right\}. \qquad (4)$$

Представив функцию $\exp\left(-\beta^2\tau^2\right)$ в (4) степенным рядом вида

$$\exp\left(-x^2\right)=\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{k!},$$

где x – аргумент функции, а k может принимать целочисленные значения от 0 до ∞, запишем (4) как

$$\overline{\varepsilon}_{д}^{2}=\sigma_{\lambda}^{2}\left[1-\frac{2}{\Delta}\int\limits_{0}^{\Delta}\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\beta\tau)^{2k}}{k!}d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Delta^2}\int\limits_{0}^{\Delta}d\tau\int\limits_{0}^{\Delta}\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{\beta^{2k}(\theta-\tau)^{2k}}{k!}d\theta\right]. \qquad (5)$$

Вычислим интегралы в (5):

$$I_1=\frac{2}{\Delta}\int\limits_{0}^{\Delta}\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\beta\tau)^{2k}}{k!}d\tau=$$

$$=2\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\beta\Delta)^{2k}}{k!(2k+1)}; \qquad (6)$$

$$I_2=\frac{1}{\Delta^2}\int\limits_{0}^{\Delta}d\tau\int\limits_{0}^{\Delta}\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{[\beta(\theta-\tau)]^{2k}}{k!}d\theta=$$

$$=\frac{1}{\Delta^2}\int\limits_{0}^{\Delta}d\tau\int\limits_{\tau}^{\tau-\Delta}\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\beta\lambda)^{2k}}{k!}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\Delta^2}\int\limits_{0}^{\Delta}d\tau\left\{-\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{[\beta(\tau-\Delta)]^{2k}}{k!(2k+1)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{\beta 2k(\tau)^{2k+1}}{k!(2k+1)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Delta^2}\int\limits_{-\Delta}^{0}-\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{\beta^{2k}\lambda^{2k+1}}{k!(2k+1)}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\int\limits_{0}^{\Delta}-\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{\beta^{2k}\tau^{2k+1}}{k!(2k+1)}d\tau=$$

$$=2\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\beta\Delta)^{2k}}{k!(2k+1)(2k+2)}. \qquad (7)$$

Подставив (6) и (7) в (5), получим:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{д}}^2 = \sigma_\lambda^2 \left\{ 1 - 2\left[\sum_0^\infty (-1)^k \frac{(\beta\Delta)^{2k}}{k!(2k+1)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_0^\infty (-1)^k \frac{(\beta\Delta)^{2k}}{k!(2k+1)(2k+2)} \right]\right\}.$$

После объединения рядов в квадратных скобках запишем окончательно:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{д}}^2 = \sigma_\lambda^2 \left[1 - \sum_0^\infty (-1)^k \frac{(\beta\Delta)^{2k}}{(k+1)!} \right] =$$
$$= \sigma_\lambda^2 \left[1 - \sum_0^\infty (-1)^k \frac{(\beta\Delta)^{2(k+1)}}{(k+1)!} \Big/ (\beta\Delta)^2 \right] =$$
$$= \sigma_\lambda^2 \left\{ 1 - \left[1 - \sum_0^\infty (-1)^k \frac{(\beta\Delta)^{2k}}{k!} \right] \Big/ (\beta\Delta)^2 \right\} =$$
$$= \sigma_\lambda^2 \left\{ 1 - \left[1 - \exp\left(-\beta^2\Delta^2\right) \right] \Big/ \left(\beta^2\Delta^2\right) \right\}. \quad (8)$$

Проверим поведение погрешности (8) при экстремальных значениях параметра Δ. Рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta\to 0} \bar{\varepsilon}_{\text{д}}^2 = \lim_{\Delta\to 0} \sigma_\lambda^2 \left[1 - \frac{1-\exp\left(-\beta^2\Delta^2\right)}{\beta^2\Delta^2} \right].$$

Разложив экспоненциальный член в ряд вида

$$\exp\left(-\beta^2\Delta^2\right) = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{(\beta\Delta)^{2k}}{k!}$$

и ограничившись тремя первыми членами ряда, получим очевидный предел:

$$\lim_{\Delta\to 0} \bar{\varepsilon}_{\text{д}}^2 = \lim_{\Delta\to 0} \sigma_\lambda^2 \left[1 - \frac{1-\beta^2\Delta^2+0.5\beta^4\Delta^4}{\beta^2\Delta^2} \right] =$$
$$= \sigma_\lambda^2 \lim_{\Delta\to 0} 0.5\beta^2\Delta^2 = 0.$$

Второй предел также очевиден. Действительно,

$$\lim_{\Delta\to \infty} \bar{\varepsilon}_{\text{д}}^2 = \lim_{\Delta\to \infty} \sigma_\lambda^2 \left[1 - \frac{1-\exp\left(-\beta^2\Delta^2\right)}{\beta^2\Delta^2} \right] = \sigma_\lambda^2.$$

Полученные пределы подтверждаются и качественным рассмотрением поведения погрешности $\bar{\varepsilon}_{\text{д}}^2 = f(\Delta)$. Учитывая условие нормировки для оператора "текущего среднего", при $\Delta \to 0$ его импульсная характеристика $h(\tau)$ вырождается в δ-функцию.

В этом случае значение оценки

$$\lambda^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t-\tau)\delta(\tau)\,d\tau = \lambda(t)$$

совпадает с текущим значением модулирующего процесса, т. е. происходит безошибочное слежение за поведением процесса $\lambda(t)$.

При $\Delta \to \infty$, что соответствует наличию у оператора бесконечной памяти, значение оценки

$$\lambda^*(t) = \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-0.5\Delta}^{0.5\Delta} \lambda(t)\,dt = \bar{\lambda} = \text{const}$$

не зависит от поведения процесса на входе оператора, т. е. происходит полное сглаживание вариаций модулирующего процесса, при котором динамическая погрешность максимальна, а ее дисперсия совпадает с σ_λ^2.

Определим дисперсию статистической погрешности – второй компоненты суммарной погрешности, обусловленной статистическим характером пуассоновских потоков отказов и восстановлений.

В соответствии с обобщенной теоремой Кемпбелла [12] дисперсия нестационарного импульсного процесса $\xi(t)$, характеризуемого функцией интенсивности $\nu_\xi(t)$ и нормируемой функцией формы импульсов $F(\theta)$, определяется как

$$D\left[\xi(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_\xi(t-\theta) F^2(\theta)\,d\theta. \quad (9)$$

Если рассматривать функцию $F(\theta)$ как реакцию оператора на δ-импульс, т. е. как импульсную (весовую) функцию оператора $h(\tau)$, а функцию $\nu_\xi(t)$ – как модулирующую функцию интенсивности $\lambda(t)$, то (9) можно трактовать как выражение для среднеквадратической статистической погрешности оператора, которая в принятых выше обозначениях имеет вид

$$\varepsilon_{\text{ст}}^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t-\tau) h^2(\tau)\,d\theta. \quad (10)$$

И поскольку вид функции $\lambda(t)$ неизвестен, то, усредняя (10) на интервале $[-\infty, \infty]$, придем к случаю стационарного импульсного шума $\bar{\lambda}$, для которого среднеквадратическая статистическая погрешность уже не будет зависеть от времени, т. е. получим:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ст}}^2 = \left\langle \varepsilon_{\text{ст}}^2(t) \right\rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t-\tau) h^2(\tau)\,d\theta \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \lambda(t-\tau) \rangle h^2(\tau) d\tau = \bar{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau) d\tau.$$

Учитывая тип оператора и условия его физической осуществимости, окончательно получим:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ст}}^2 = \bar{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau) d\tau = \bar{\lambda} \int_0^{\Delta} \frac{1}{\Delta^2} d\tau = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta}. \quad (11)$$

Проверим поведение погрешности (11) при экстремальных значениях параметра оператора:

$$\lim_{\Delta \to 0} \bar{\varepsilon}_{\text{ст}}^2 = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\bar{\lambda}}{\Delta} = \bar{\lambda} \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} = \infty;$$

$$\lim_{\Delta \to \infty} \bar{\varepsilon}_{\text{ст}}^2 = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{\bar{\lambda}}{\Delta} = \bar{\lambda} \lim_{\Delta \to \infty} \frac{1}{\Delta} = 0.$$

Эти очевидные пределы совпадают и с качественным рассмотрением поведения погрешности

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ст}}^2 = f(\Delta).$$

Действительно, примем во внимание, что

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ст}}^2 = \left\langle \left(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_i^* \right)^2 \right\rangle,$$

где $\bar{\lambda}_i^*$ – оценка интенсивности стационарного пуассоновского потока, вычисленная в предположении, что за интервал наблюдения Δi зарегистрировано N_i событий, т. е.

$$\bar{\lambda}_i^* = \frac{N_i}{\Delta_i}.$$

Предположим теперь, что интервал наблюдения настолько мал, что вероятность попасть в него одновременно двум и более событиям есть величина высшего порядка малости по сравнению с вероятностью попадания одного события или непопадания событий вообще. В этом случае оценка интенсивности потока может принимать значения "0" или $1/\Delta$, а дисперсия статистической погрешности $\bar{\varepsilon}_{\text{ст}}^2 \to \infty$ при $\Delta \to 0$.

Если же предположить, что интервал наблюдения так велик, что вероятность появления в нем $N + 1$ или $N - 1$ событий мала по сравнению с вероятностью появления ровно N событий, то в этом случае значение оценки $\bar{\lambda}^* \to \bar{\lambda}$, а дисперсия статистической погрешности $\bar{\varepsilon}_{\text{ст}}^2 \to 0$.

Дисперсия суммарной погрешности

$$\bar{\varepsilon}_{\Sigma}^2 = \bar{\varepsilon}_{\text{д}}^2 + \bar{\varepsilon}_{\text{ст}}^2. \quad (12)$$

Подставив (8) и (11) в (12), получим выражение для дисперсии суммарной среднеквадратической погрешности в виде

$$\bar{\varepsilon}_{\Sigma}^2 = \sigma_{\lambda}^2 \left[1 - \frac{1 - \exp\left(-\beta^2 \Delta^2\right)}{\beta^2 \Delta^2} \right] + \frac{\bar{\lambda}}{\Delta}. \quad (13)$$

Оптимальное значение параметра Δ, при котором (13) имеет минимум, следует искать из условия

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_{\Sigma}^2}{d\Delta} = 0. \quad (14)$$

Подставив (13) в (14) и продифференцировав, получим:

$$2\sigma_{\lambda}^2 \frac{1 - \left(1 + \beta^2 \Delta^2\right) \exp\left(-\beta^2 \Delta^2\right)}{\beta^2 \Delta^3} - \frac{\bar{\lambda}}{\Delta^2} = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) относительно Δ является трансцендентным и может быть решено только либо численно, либо графически. Для получения приближенного аналитического решения представим экспоненциальный множитель $\exp\left(-\beta^2 \Delta^2\right)$ аппроксимирующим трехчленом вида

$$\exp\left(-\beta^2 \Delta^2\right) \approx 1 - (\beta\Delta)^2 + 0.5(\beta\Delta)^4. \quad (16)$$

Погрешность такой аппроксимации для практически реальных случаев, когда $\beta\Delta \le 0.5$, не превышает 1 %.

Перепишем (15) с учетом (16):

$$2\sigma_{\lambda}^2 \frac{1 - \left[1 - (\beta\Delta)^2 + 0.5(\beta\Delta)^4\right]\left(1 + \beta^2 \Delta^2\right)}{\beta^2 \Delta^3} - $$

$$- \frac{\bar{\lambda}}{\Delta^2} = 0. \quad (17)$$

После преобразования (17) получим:

$$2\sigma_{\lambda}^2 \frac{0.5(\beta\Delta)^4 - 0.5(\beta\Delta)^6}{\beta^2 \Delta^3} - \frac{\bar{\lambda}}{\Delta^2} = 0. \quad (18)$$

Для того чтобы явно разрешить (18) относительно $\Delta = \Delta_{\text{opt}}$, отбросим достаточно малый член $0.5(\beta\Delta)^6$. При этом погрешность аппроксимации (16) для подавляющего большинства практических случаев, когда $\beta\Delta \le 0.3$, не превышает 5 %. Такая последовательная аппроксимация (16) оказалась вдвое точнее, чем аппроксимация экспоненциального члена $\exp\left(-\beta^2 \Delta^2\right)$ двучленом $1 - (\beta\Delta)^2$.

Таким образом, упростив (18) и разрешив его относительно $\Delta = \Delta_{opt}$, получим окончательно:

$$\Delta_{opt} = \frac{1}{\beta}\sqrt[3]{\frac{\beta\bar{\lambda}}{\sigma_\lambda^2}}. \quad (19)$$

Подставив (19) в (13), в котором экспоненциальный член предварительно аппроксимируем трехчленом (16), получим выражение для дисперсии минимальной суммарной погрешности в виде

$$\bar{\varepsilon}^2_{\Sigma\min} = \sigma_\lambda^2\left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\beta\bar{\lambda}/\sigma_\lambda^2\right)^2} + \frac{\beta\bar{\lambda}}{\sigma_\lambda^2}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\beta\bar{\lambda}/\sigma_\lambda^2\right)^2}}\right]. \quad (20)$$

Введем в рассмотрение параметр

$$A_{SN} = \frac{P_c}{P_{ш.э}}, \quad (21)$$

выражающий отношение мощности полезного сигнала P_c к мощности шума в эквивалентной полосе частот $P_{ш.э}$, и определим его через параметры наблюдаемого процесса. Эквивалентную полосу частот $F_э$ энергетического спектра случайного процесса определим в виде [13]:

$$F_э = \frac{1}{2\pi F(\omega_0)}\int_0^\infty F(\omega)\,d\omega = \frac{R_\lambda(0)}{F(\omega_0)}, \quad (22)$$

где $F(\omega)$ – спектральная плотность мощности модулирующего процесса; $F(\omega_0)$ – спектральная плотность на характерной частоте ω_0; $\omega_0 = 0$; $R_\lambda(0)$ – средняя мощность стационарного процесса.

Согласно теореме Винера–Хинчина при $\omega_0 = 0$ и $F(\omega_0) = F(0)$,

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\lambda(\tau)\,d\tau = 2\sigma_\lambda^2 S_0, \quad (23)$$

где $R_\lambda(\tau)$ – функция автокорреляции модулирующего процесса; $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2\exp\left(-\beta^2\tau^2\right)$; S_0 – площадь под нормированной функцией автокорреляции.

Подставив (23) в (22) и учитывая, что $R_\lambda(0) = \sigma_\lambda^2$, получим:

$$F_э = \frac{\sigma_\lambda^2}{2\sigma_\lambda^2 S_0} = \frac{1}{2S_0}. \quad (24)$$

Примем энергетический спектр эквивалентного импульсного шума постоянным в достаточно широкой полосе частот и равным $2\bar{\lambda}$ [13]. Тогда в эквивалентной полосе частот модулирующего процесса мощность импульсного шума с учетом (24) найдем как

$$P_{ш.э} = 2\bar{\lambda}F_э = \frac{2\bar{\lambda}}{2S_0} = \frac{\bar{\lambda}}{S_0}. \quad (25)$$

Учитывая, что $P_c = \sigma_\lambda^2$, и подставив значения P_c и $P_{ш.э}$ (25) в (21), запишем окончательно:

$$A_{SN} = \frac{\sigma_\lambda^2 S_0}{\bar{\lambda}}. \quad (26)$$

Для гауссовской функции автокорреляции:

$$S_0 = 2\int_0^\infty \exp\left(-\beta^2\tau^2\right)d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}, \quad (27)$$

где β – частотный параметр модулирующего процесса, $\beta\tau_к = 1$.

Тогда с учетом (27) запишем (26) в виде

$$A_{SN} = \sqrt{\pi}\frac{\sigma_\lambda^2}{\beta\bar{\lambda}}. \quad (28)$$

С учетом (28) запишем (19) и (20) как

$$\Delta_{opt} = \frac{1}{\beta}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\pi}}{A_{SN}}}; \quad (29)$$

$$\bar{\varepsilon}^2_{\Sigma\min} = \frac{\sigma_\lambda^2}{2A_{SN}}\left(\frac{\sqrt[3]{\pi^2} + 2\sqrt[3]{\pi A_{SN}^2}}{\sqrt[3]{A_{SN}}}\right). \quad (30)$$

Полученные соотношения (29) и (30) связывают соответственно оптимальное значение интервала наблюдения событий потока отказов и дисперсию суммарной минимальной погрешности оценивания его интенсивности с энергетическим параметром потока.

Экспоненциальная функция автокорреляции модулирующего процесса. Экспоненциальная функция автокорреляции в общей форме записи имеет вид

$$R(\tau) = \sigma^2\exp(-\beta|\tau|). \quad (31)$$

Как и в предыдущем случае, оптимальное значение интервала наблюдения потока отказов будем искать из условия минимума дисперсии суммарной погрешности.

Для определения дисперсии динамической погрешности воспользуемся выражением для динамической погрешности в виде [13]

$$\overline{\varepsilon}_{Д}^{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S_{\lambda}(\omega)\left[1-\left|H(j\omega)\right|\right]^{2}d\omega, \qquad (32)$$

где $S_{\lambda}(\omega)$ – спектральная плотность полезного сигнала на входе линейного оператора; $H(j\omega)$ – передаточная функция оператора.

Для гаусс-марковских процессов с функцией автокорреляции (31)

$$S_{\lambda}(\omega)=\frac{2\sigma_{\lambda}^{2}\beta}{\beta^{2}+\omega^{2}}; \qquad (33)$$

$$H(j\omega)=H(\omega)=\frac{\sin(\omega\Delta/2)}{\omega\Delta/2}. \qquad (34)$$

Подставив (33) и (34) в (32), получим:

$$\overline{\varepsilon}_{Д}^{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{2\sigma_{\lambda}^{2}\beta}{\beta^{2}+\omega^{2}}\left[1-\frac{\sin(\omega\Delta/2)}{(\omega\Delta/2)}\right]^{2}d\omega. \qquad (35)$$

Интеграл (35) разобьем на 3 интеграла:

$$\overline{\varepsilon}_{Д}^{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{2\sigma_{\lambda}^{2}\beta}{\beta^{2}+\omega^{2}}d\omega-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{2\sigma_{\lambda}^{2}\beta}{\beta^{2}+\omega^{2}}\frac{\sin(\omega\Delta/2)}{(\omega\Delta/2)}d\omega+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{2\sigma_{\lambda}^{2}\beta}{\beta^{2}+\omega^{2}}\frac{\sin^{2}(\omega\Delta/2)}{(\omega\Delta/2)^{2}}d\omega.$$

После интегрирования получим окончательно [14]:

$$\overline{\varepsilon}_{Д}^{2}=\sigma_{\lambda}^{2}\left[1-4\frac{1-\exp(-0.5\beta\Delta)}{\beta\Delta}+\right.$$

$$\left.+2\frac{\beta\Delta-1+\exp(-\beta\Delta)}{(\beta\Delta)^{2}}\right]. \qquad (36)$$

Проверим поведение погрешности (36) при экстремальных значениях параметра Δ:

$$\lim_{\Delta\to 0}\overline{\varepsilon}_{Д}^{2}=\sigma_{\lambda}^{2}\lim_{\Delta\to 0}\left[1-4\frac{1-\exp(-0.5\beta\Delta)}{\beta\Delta}+\right.$$

$$\left.+2\frac{\beta\Delta-1+\exp(-\beta\Delta)}{(\beta\Delta)^{2}}\right]=0.$$

Применив правило Лопиталя, также получим:

$$\lim_{\Delta\to\infty}\overline{\varepsilon}_{Д}^{2}=\sigma_{\lambda}^{2}\lim_{\Delta\to\infty}\left[1-4\frac{1-\exp(-0.5\beta\Delta)}{\beta\Delta}+\right.$$

$$\left.+2\frac{\beta\Delta-1+\exp(-\beta\Delta)}{(\beta\Delta)^{2}}\right]=\sigma_{\lambda}^{2}.$$

Полученные значения пределов совпадают с качественным рассмотрением поведения погрешности $\overline{\varepsilon}_{\Sigma}^{2}$.

Подставив (36) и (11) в (12), получим выражение для дисперсии суммарной среднеквадратической погрешности в виде

$$\overline{\varepsilon}_{\Sigma}^{2}=\sigma_{\lambda}^{2}\left[1-4\frac{1-\exp(-0.5\beta\Delta)}{\beta\Delta}+\right.$$

$$\left.+2\frac{\beta\Delta-1+\exp(-\beta\Delta)}{(\beta\Delta)^{2}}\right]+\frac{\overline{\lambda}}{\Delta}. \qquad (37)$$

Заменим экспоненциальные члены (37) аппроксимирующими трехчленами вида

$$\exp(-\beta\Delta)\approx 1-\beta\Delta+0.5(\beta\Delta)^{2}. \qquad (38)$$

Погрешность такой аппроксимации для большинства практических случаев, когда $\beta\Delta\le 0.4$, не превышает 1.5 %.

С учетом (38) и после упрощений получим:

$$\overline{\varepsilon}_{\Sigma}^{2}=\sigma_{\lambda}^{2}\frac{\beta\Delta}{2}+\frac{\overline{\lambda}}{\Delta}. \qquad (39)$$

Продифференцировав (39) по Δ и приравняв производную нулю, получим уравнение

$$\sigma_{\lambda}^{2}\frac{\beta}{2}-\frac{\overline{\lambda}}{\Delta^{2}}=0. \qquad (40)$$

Разрешив (40) относительно $\Delta=\Delta_{opt}$, получим:

$$\Delta_{opt}=\sqrt{\frac{2\overline{\lambda}}{\sigma_{\lambda}^{2}\beta}}. \qquad (41)$$

Определим выражение для параметра A_{SN} для нестационарного случайного процесса с функцией автокорреляции модулирующего процесса вида (31). Согласно (26) запишем:

$$A_{SN}=\frac{\sigma_{\lambda}^{2}}{\overline{\lambda}}2\int_{0}^{\infty}\exp(-\beta|\tau|)d\tau=\frac{2\sigma_{\lambda}^{2}}{\overline{\lambda}\beta}. \qquad (42)$$

С учетом (42) перепишем (41) в виде

$$\Delta_{opt}=\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{1}{A_{SN}}}. \qquad (43)$$

Подставив (43) в (39) и учитывая (42), получим:

$$\overline{\varepsilon}_{\Sigma\min}^{2}=\frac{2\sigma_{\lambda}^{2}}{\sqrt{A_{SN}}}. \qquad (44)$$

Соотношения (43) и (44) связывают соответственно оптимальное значение интервала наблюдения событий потока отказов и дисперсию суммарной минимальной погрешности оценивания его интенсивности с энергетическим параметром потока.

Вывод. В настоящей статье в полном объеме представлены результаты расчета оптимального интервала наблюдения нестационарного потока отказов РЭС для широкого класса случайных процессов, модулирующих поток по интенсивности. Полученные результаты качественно хорошо согласуются с результатами ранее проведенного имитационного моделирования, представленными в [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдюшин С. И., Соколов С. С. Методы и средства регистрации потоков ионизирующих излучений в околоземном космическом пространстве // Радиотехника. 2012. № 7. С. 122–126.

2. Соколов С. С. Профессор В. О. Вяземский – основатель в ЛЭТИ научно-практического направления космического приборостроения (к 85-летию со дня рождения) // Изв. СПбГЭТУ "ЛЭТИ". 2014. № 8. С. 104–109.

3. А. с. СССР № 1401395. Адаптивный измеритель скорости счета / В. А. Казанский, С. С. Соколов; опубл. 07.06.88. Бюл. № 21.

4. Соколов С. С. Адаптивная фильтрация интенсивности точечных процессов с двойной стохастичностью // Изв. СПбГЭТУ "ЛЭТИ". 2009. № 10. С. 7–12.

5. Обеспечение радиационной стойкости аппаратуры космических аппаратов при проектировании / М. А. Артюхова, В. В. Жаднов, С. Н. Полесский, В. А. Прохоров // Компоненты и технологии. 2010. № 9. С. 93–98.

6. Оценка оптимальных параметров экранов для защиты электронных систем космических аппаратов от ионизирующих излучений / И. П. Безродных, Е. И. Морозова, А. А. Петрукович, В. Т. Семенов // Вопр. электромеханики. 2012. Т. 131. С. 15–18.

7. Белоус А. И., Солодуха В. А., Шведов С. В. Космическая электроника: в 2 кн. Кн. 1. М.: Техносфера, 2015. 696 с.

8. Сваричевский М. Микроэлектроника для космоса и военных. URL: http://habrahabr.ru/post/156049/ (дата обращения: 02.04.2018).

9. Шунков В. Физика радиационных эффектов, влияющих на электронику в космосе. URL: http://geektimes.ru/post/254084/ (дата обращения: 18.03.2018).

10. Вяземский В. О. Ошибки воспроизведения текущего значения интенсивности случайного импульсного потока по его реализации // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. № 5. С. 137–143.

11. Солодовников В. В. Микропроцессорные автоматические системы регулирования. М.: Высш. шк., 1991. 256 с.

12. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1: Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 494 с.

13. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.

14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. 1108 с.

15. Соколов С. С., Чернов М. А. Имитационное моделирование дваждыстохастического импульсного потока // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2000. Вып. 1. С. 15–18.

Статья поступила в редакцию 13 апреля 2018 г.

Соколов Сергей Сергеевич – доктор технических наук (1996), профессор (1998), профессор кафедры микрорадиоэлектроники и технологии радиоаппаратуры Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор более 75 научных публикаций. Сфера научных интересов – случайные процессы с двойной стохастичностью; системная инженерия.
E-mail: tri-s-leningrad@yandex.ru

REFERENCES

1. Avdyushin S. I., Sokolov S. S. Methods and Equipment for Ionizing Radiation Registration in Near-Earth Space. *Radiotekhnika* [Radioengineering]. 2012, no. 7, pp. 122–126. (In Russian)

2. Sokolov S. S. Professor V. O. Vyazemsky, Founder of Scientific and Practical Space Instrumentation in LETI (to his 85th Anniversary). *Izvestiya SPbGETU "LETI"* [Proceedings of Saint Petersburg Electrotechnical University]. 2014, no. 8, pp. 104–109. (In Russian)

3. Kazanskii V. A. Sokolov S. S. *Adaptivnyi izmeritel' skorosti scheta* [Adaptive Meter Count Rate]. Copyright certificate SSSR, no. 1401395, 1988. (In Russian)

4. Sokolov S. S. Adaptive Filtering of Intensity Point Processes with Double Stochasticity. *Izvestiya SPbGETU "LETI"* [Proceedings of Saint Petersburg Electrotechnical University]. 2009, no. 10, pp. 7–12. (In Russian)

5. Artyukhova M. A., Zhadnov V. V., Polesskii S. N., Prokhorov V. A. Equipment Radiation Resistance in Spacecraft Design. *Komponenty i tekhnologii* [Components and technologies]. 2010, no. 9, pp. 93–98. (In Russian)

6. Bezrodnykh I. P., Morozova E. I., Petrukovich A. A., Semenov V. T. Estimation of Screen Optimal Parameters to Protect Spacecraft Electronic Systems from Ionizing Radiation [Electromechanical Matters]. 2012, vol. 131, pp.15–18. (In Russian)

7. Belous A. I., Solodukha V. A., Shvedov S. V. *Kosmicheskaya elektronika. V 2 kn. Kn. 1* [Space Electronics]. Moscow, *Tekhnosfera*, 2015, 696 p. (In Russian)

8. Svarichevskii M. Microelectronics for Space and Army. Available at: http://habrahabr.ru/post/156049/ (accessed: 02.04.2018). (In Russian)

9. Shunkov V. Physics of Radiation Effects Affecting Electronics in Space. Available at: http://geektimes.ru/post/254084/ (accessed 02.04.2018). (In Russian)

10. Vyazemsky V. O. Current Value Reproduction Error Rate for Random Pulse Stream based on its Realization. *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [Journal of the USSR Academy of Science. Technical cybernetic]. 1976, no. 5, pp. 137–143. (In Russian)

11. Solodovnicov V. V. *Mikroprotsessornye avtomaticheskie sistemy regulirovaniya* [Microprocessor Automatic Control System]. Moscow, *Vysshaya shkola*, 1991, 256 p. (In Russian)

12. Ryutov S. M. *Vvedenie v statisticheskuyu radiofiziku. Chast' 1. Sluchainye protsessy* [Introduction to Statistical Radiophysics. Pt. 1. Random Processes]. Moscow, *Nauka*, 1976, 494 p. (In Russian)

13. Levin B. R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoi radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Moscow, *Radio i svyaz'*, 1989, 656 p. (In Russian)

14. Gragshtein I. C., Ryigik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* [Table of Integrals, Series and Products]. Moscow, *Nauka*, 1963, 1108 p. (In Russian)

15. Sokolov S. S., Chernov M. A. Simulation Modeling of Double-Stochastic Pulse Stream. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2000, no. 1, pp. 15–18. (In Russian)

Received April, 13, 2018

Sergey S. Sokolov – D.Sc. in Engineering (1996), Professor (1998), Professor of the Micro Radio Electronics and Technology of Radio Equipment Department of Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". The author of more than 75 scientific publications. Area of expertise: double-stochastic processes; system engineering.
E-mail: tri-s-leningrad@yandex.ru